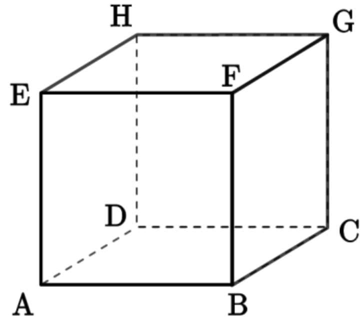
FICHE D'EXERCICES : CHAPITRE 7 ORTHOGONALITE

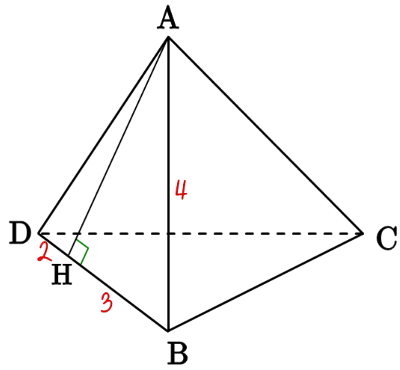
Exercice 1 ABCDEFGH est un cube d'arête 1 .



Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DG}$.

Utiliser la décomposition $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GF}$ pour calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DF}$.

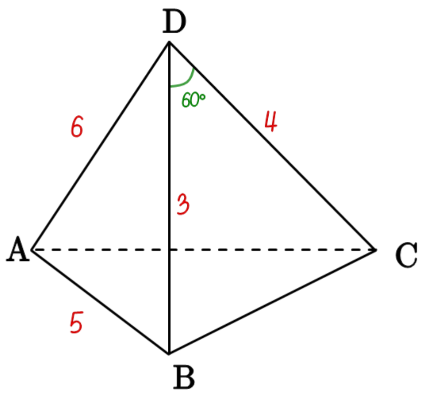
Exercice 2 ABCD est le tétraèdre ci-contre et H est le pied de la hauteur issue de A du triangle ABD . Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$.



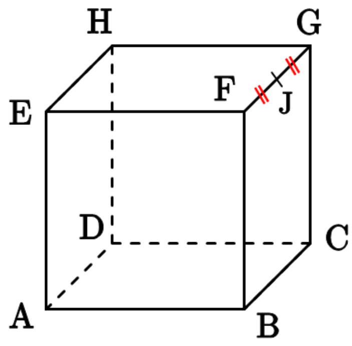
Exercice 3 ABCD est le tétraèdre ci-contre.

1. Déterminer $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$

2. Déterminer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

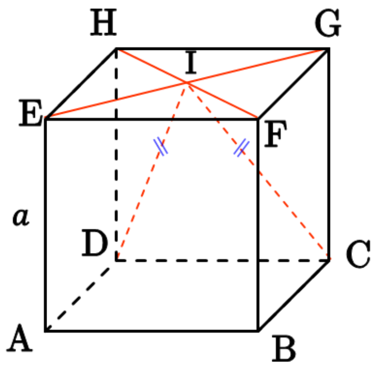


Exercice 4 Le cube ABCDEFGH a pour arête a $(a > 0)$. J est le milieu de $[FG]$. Déterminer chaque produit scalaire en précisant l'expression et le plan utilisée .



1. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ 2. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$ 3. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EH}$ 4. $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AB}$ 5. $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}$
6. $\overrightarrow{FJ}.\overrightarrow{GD}$ 7. $\overrightarrow{BJ}.\overrightarrow{EH}$

Exercice 5 *on admet qu'une diagonale d'un carré de côté a mesure* $a\sqrt{2}$.



Le cube $ABCDEFGH$ a pour arête a et I le centre de la face $EFGH$.

1. Donner la nature du triangle DCI .
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IC}$.
3. Exprimer ce produit scalaire en fonction de $\cos(\widehat{DIC})$ et en déduire la mesure de l'angle $\widehat{DIC}$. Arrondir au dixième .

Exercice 6

Dans l'espace , $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\vec{u}.\,\vec{v} = 2$.

Dans chaque cas, déterminer mentalement le produit scalaire .

a) $(3\vec{u}).\vec{v}$ b) $\vec{u}.(-\vec{v})$ c) $\frac{1}{2}\vec{u}\,.(-\vec{v})$

Exercice 7

Dans l'espace , $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}.\vec{v} = 1$.

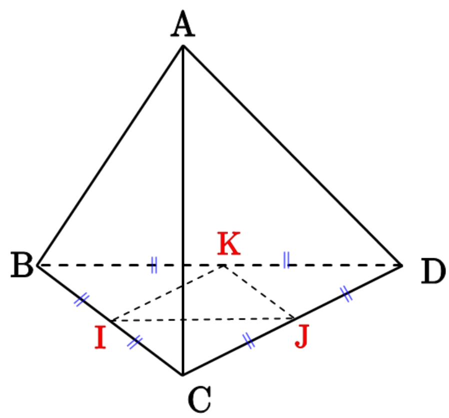
Franck affirme : « $(\vec{u}+\vec{v})^2 = 14$ ». A-t-il raison ?

Exercice 8

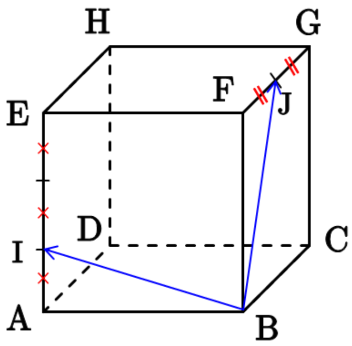
ABCD est un tétraèdre régulier d'arête a et I, J, K sont les milieux respectifs des arêtes [BC] , [CD] , [BD] .

On admet que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{KJ}$.

1. Calculer chacun de produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{JK}$.
2. En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IK}$



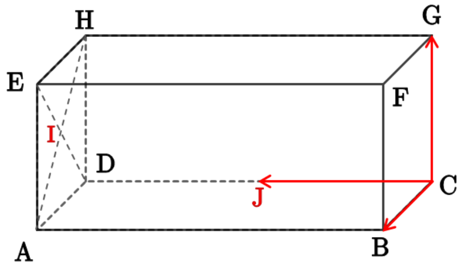
Exercice 9



Ce cube a pour arête 2. I est le point de l'arête [AE] tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$ et J est le milieu de l'arête $[FG]$. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BJ}$.

Conseil : écrire $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FJ}$.

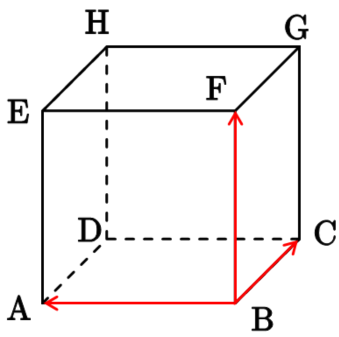
Exercice 10 ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que



AD = AE = 1 et AB = 2 . I est le centre du carré ADHE et J le milieu de l'arête [DC] . On se place dans le repère $\left(C; \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{CG}\right)$.

1. Justifier que ce repère est orthonormé .
2. K est le centre de la face EFGH et L celui de la face BCGF . Donner les coordonnée des points K et L dans ce repère . En déduire la longueur KL .

Exercice 11 ABCDEFGH est cube d'arête 1 .



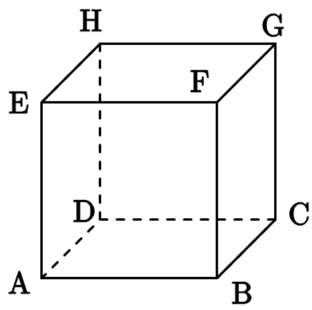
On se place dans le repère orthonormé $\left(B; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF}\right)$.

a) Donner les coordonnées des sommets du cube dans ce repère .

b) Démonter que les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont orthogonaux .

c) Démonter que les vecteurs $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont orthogonaux .

Exercice 12 ABCDEFGH est cube d'arête a .

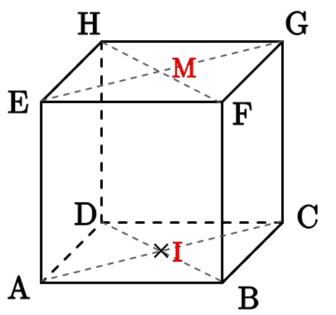


a) Exprimer $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{BG}$ en fonction de a .

b) Utiliser $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH}$ pour calculer $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BG}$.

c) En déduire que les droite (DF) et (BG) sont orthogonales .

Exercice 13 ABCDEFGH est cube. M et I sont les centres respectifs des la faces EFGH et ABCD.

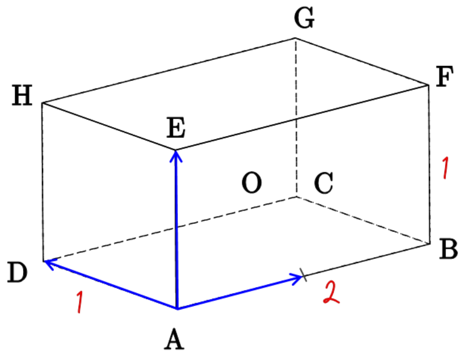


a) Déterminer le projeté orthogonal de M sur le plan (ABC) .

b) Déterminer le projeté orthogonal du point M sur la droite (FB).

Exercice 14

ABCDEFGH est le parallélépipède rectangle représenté ci-contre .



a) Construire la figure et choisir un repère orthonormé de l'espace d'origine A.

b) Déterminer les coordonnées de O et F puis calculer $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OF}$.

c) Déterminer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{AOF}$. *Arrondir au dixième* .

Exercice 15

L'espace est muni d'un repère orthonormé . Dans chaque cas, déterminer la ou les valeurs de α pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux .

a) $\vec{u}(-3\alpha\,;1\,;\alpha)$ et $\vec{v}(1\,;2\alpha\,;3)$

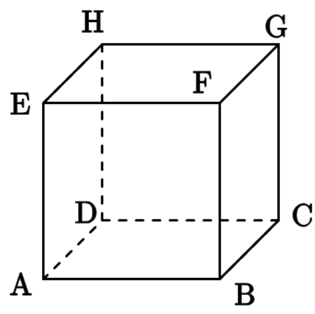
b) $\vec{u}(-1\,;3\alpha\,;2)$ et $\vec{v}(0\,;\alpha\,;3\alpha)$

c) $\vec{u}(1\,;\alpha\,;\alpha)$ et $\vec{v}(1\,;2\,;\alpha)$

Exercice 16

L'espace est muni d'un repère orthonormé . A(0;1;2) , B(1; 2; 3) , C(5; -3 ; -2) et D(7 ; -4 ; -3) sont quatre points de l'espace . Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales .

Exercice 17 - question flash



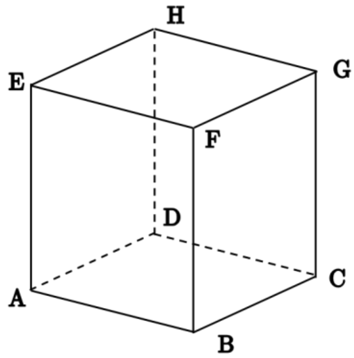
Charles affirme: « Les droites (FG) et (FB) sont orthogonales donc la droite (FG) est orthogonale au plan (HFB) » . A-t-il raison .

Exercice 18 - question flash

Lily affirme : « La droite (EG) est orthogonale au plan (HFB) ». A-t-elle raison ?

Exercice 19

ABCDEFGH est un cube d'arête 1



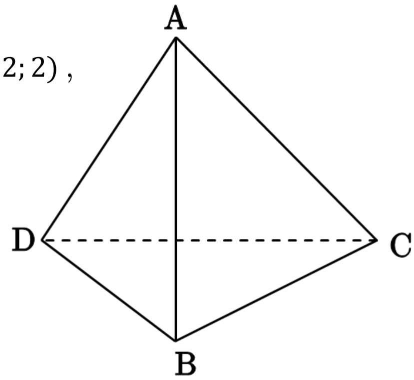
a) Choisir un repère orthonormé de l'espace d'origine A.

b) Dans ce repère, donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$.

c) Démontrer que la droite (DF) est orthogonale au plan (EBG) .

Exercice 20

L'espace est muni d'un repère orthonormé . ABCD est un tétraèdre avec $\mathrm{A}(2;2;2)$, $\mathrm{B}(2;-2;-2)$, $\mathrm{C}(-2;2;-2)$ et $\mathrm{D}(-2;-2;2)$.



a) Vérifier que le tétraèdre ABCD est régulier .

b) Calculer les coordonnées du point I milieu du segment [AB] .

c) Démontrer que la droite (AI) est orthogonale à la droite (CD) .

Exercice 21 Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur un plan

Dans un repère orthonormé de l'espace $\mathcal{P}$ est le plan d'équation cartésienne $x-2y+3z-17=0$

et A le point de coordonnées $(2;5;-1)$.

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale à $\mathcal{P}$.

b) En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.

Exercice 22 Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite

Dans un repère de l'espace, d est la droite qui passe par le point $A(1;3;0)$ et dont $\vec{u}(-2;1;5)$ est un vecteur directeur . B est le point de coordonnée $(2;0;7)$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par B et orthogonal à d .

b) En déduire les coordonnées du point K, projeté orthogonal de B sur d .

Exercice 23

Déterminer une équation cartésienne du plan :

a) $\mathcal{P}$ coloré en bleu passant le point A et orthogonal à l'axe des ordonnées .

b) $\mathcal{R}$ coloré en jeune passant par le point B et orthogonal à l'axe des côtes .

Exercice 24 $\mathcal{P}$ est le plan d'équation cartésienne : $2x - 3y + z - 5 = 0$.

Dans chaque cas indiquer si le point appartient ou non au plan $\mathcal{P}$.

$A(1; -1; 0)$ $B(2; -1; 3)$ $C\left(\frac{3}{2}; \frac{2}{3}; 5\right)$

Exercice 25 $\mathcal{P}$ est le plan d'équation cartésienne : $x - y + 2z + 1 = 0$.

a) Donner les coordonnées de trois points A, B et C qui appartiennent au plan $\mathcal{P}$.

b) En déduire les coordonnées de deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$.

Exercice 26 Dans chaque cas, donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$:

a) A(2;1;5) et $\vec{n}(-1; 1; 4)$ b) $A(0; 0; 0)$ et $\vec{n}(2; -1; 1)$

Exercice 27 $\mathcal{P}$ est le plan d'équation cartésienne : $5x - y + z + 2 = 0$.

$\mathcal{R}$ est le plan parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par le point $A(1; -1; -2)$.

a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à $\mathcal{R}$.

b) Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{R}$.

Exercice 28 On donne les points $I(1; 2; 0)$, $J(-1; 0; -2)$, $K(2; 3; 0)$, $L(-1; -2; -1)$.

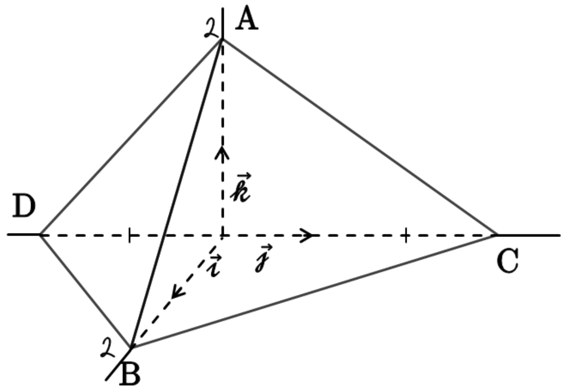
1. Vérifier que les points I, J , K ne sont pas alignés .

2. a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2; -2; 0)$ est un vecteur normal au plan (IJK) .

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (IJK) .

3. Les points I, J , K , L sont-ils coplanaires ? Justifier .

Exercice 29 On a placé quatre points A, B, C, D dans le repère orthonormé ci-dessous .



a) Lire les coordonnées des points A, B, C et D .

b) Démontrer que le vecteurs $\overrightarrow{n}(3;2;3)$ est normal au plan (ABC) ; puis que le vecteurs est normal au plan (ABD) .

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) , puis du plan (ABD) .

d) Alix affirme : « le point E$(-10;-15;-3)$ appartient à l'un des deux plans . A-t-elle raison ?

Exercice 30 Dans l'espace, le plan médiateur d'un segment est le plan orthogonal à ce segment en son milieu . Dans un repère orthonormé, on donne les points A$(1;-2;3)$ et B$(3;2;1)$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur du segment [AB] . On le note $\mathcal{P}$.

b) Montrer que le point $\mathrm{C}(-2;1;0) \in \mathcal{P}$. Vérifier qu'il est équidistant de A et de B .

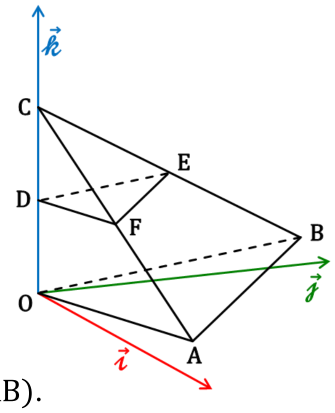
Exercice 31 Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x-3y-2z+3=0$ et d la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-3+5t \\ z=7-t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Déterminer la position relative du plan $\mathcal{P}$ et de la droite d .

Exercice 32 Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x-5y+3z-7=0$ et d la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=5+4t \\ y=2+t \\ z=9-t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Etudier la position relative du plan $\mathcal{P}$ et de la droite d .

Exercice de synthèse n°1



L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(10; 0; 1), B(1; 7; 1) et C(0; 0; 5).

1. a) Démontrer que les droites (OA) et (OB) ne sont pas perpendiculaires .

b) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$, arrondie au dixième de degré .

2. Vérifier que $7x + 9y - 70z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).

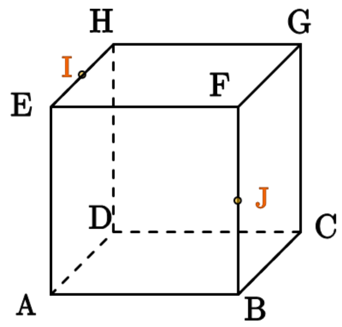
3. Donner une représentation paramétrique de la droite (CA).

4. Soit D le milieu du segment [OC]. Déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$ parallèle au plan (OAB) passant par D.

5. Le plan $\mathcal{P}$ coupe la droite (CB) en E et la droite (CA) en F. Déterminer les coordonnées du point F. On admet que le point E a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}; 3\right)$.

6. Démontrer que la droite (EF) est parallèle à la droite (AB).

Exercice de synthèse n°2 : Sujet B page 122



Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre .

On note I les milieux respectifs des segments [EH] et [FB] . On munit l'espace du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées de I et de J .

2. a) Montrer que le vecteur $\vec{n}(1; -2; 2)$ est un vecteur normal au plan (BGI) .

   b) En déduire une équation cartésienne du plan (BGI) .

3. On note K le milieu du segment [HJ] . Le point K appartient-il au plan (BGI) ?

4. On souhaite calculer l'aire du triangle BGI .

   a. En utilisant le triangle FIG pour la base, démontrer que le volume du tétraèdre FBIG est égal à $\frac{1}{6}$.

   b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par F et orthogonale au plan (BGI).

c. En déduire que le projeté orthogonal F' de F sur le plan (BGI) a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9};\frac{4}{9};\frac{5}{9}\right)$.

5. Calculer la longueur FF' . En déduire l'aire du triangle BGI .